



ЗАДАЧА ТРИСЕКЦІЇ КУТА ЯК ЗАСІБ ДОСЛІДНИЦЬКОГО НАВЧАННЯ ГЕОМЕТРІЇ

Смоліна Алла Іванівна,
аспірант кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу
ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
учитель математики

Іршавський ліцей № 2 Іршавської міської ради Закарпатської області
alla.smolina@uzhnu.edu.ua
orcid.org/0009-0009-1778-5653

Мета. Обґрунтувати дидактичний потенціал класичної математичної проблеми поділу довільного кута на три рівні частини як навчально-дослідницького кейсу та показати можливості поєднання геометричної побудови, цифрового експерименту, кількісного аналізу похибки й математичної аргументації у навчанні математики. **Методи.** Використано теоретичний аналіз і узагальнення наукової та науково-методичної літератури, аналіз і моделювання геометричних побудов, цифровий експеримент у середовищі GeoGebra, вимірювання та порівняння кутових величин, кількісний аналіз абсолютної кутової похибки, елементи кореляційного аналізу, педагогічну інтерпретацію та структурно-логічне моделювання навчально-дослідницької діяльності. Авторську побудову розглянуто як дослідницьку гіпотезу, а не як доведений універсальний спосіб точного розв'язання класичної задачі. Результати. Цифрову перевірку проведено для 18 довільно обраних значень вихідного кута в діапазоні від $25,6^\circ$ до 90° . Середня абсолютна похибка становила $0,0815^\circ$, максимальне зафіксоване відхилення окремої частини від теоретичного значення $\alpha/3$ – близько $0,267^\circ$. Вираженої лінійної залежності між величиною вихідного кута та середньою абсолютною похибкою не виявлено ($r \approx -0,12$). Установлено характерну симетрію результатів: крайні кути збігаються в межах точності цифрового вимірювання, тоді як відхилення переважно виявляється у величині центрального кута. На основі педагогічної інтерпретації дослідження структуровано чотирикомпонентну модель діяльності, що охоплює проблемно-пошуковий, конструктивний, експериментально-аналітичний і рефлексивно-доказовий компоненти. Висновки. Запропонована конструкція має трактуватися як наближена. Її дидактична цінність полягає у можливості організувати цілісний цикл математичного дослідження: від постановки проблеми й висунення гіпотези до цифрової перевірки, оцінювання похибки, критичної інтерпретації та аргументованого висновку. Такий підхід може бути використаний на уроках, факультативних і гурткових заняттях, зокрема у роботі з математично обдарованими учнями, для розвитку самостійного пошуку, критичного оцінювання цифрових результатів, культури математичного доказу та готовності переглядати початкові припущення.

Ключові слова: динамічне математичне моделювання, GeoGebra, цифровий експеримент, абсолютна кутова похибка, математична аргументація, проблемно-пошукова діяльність.

ANGLE TRISECTION PROBLEM AS A TOOL FOR INQUIRY-BASED GEOMETRY LEARNING

Smolina Alla Ivanivna,
PhD Student, Department of Probability Theory and Mathematical Analysis
Uzhhorod National University,
Mathematics Teacher,

Irshava Lyceum No. 2 of the Irshava City Council, Zakarpattia Region
alla.smolina@uzhnu.edu.ua
orcid.org/0009-0009-1778-5653

Purpose. The study aims to substantiate the didactic potential of the classical mathematical problem of dividing an arbitrary angle into three equal parts as a research-oriented learning case and to demonstrate how geometric construction, digital experimentation, quantitative error analysis, and mathematical reasoning can be combined in mathematics education. **Methods.** The study employed theoretical analysis and generalization of scientific and methodological literature, analysis and modelling of geometric constructions, a digital experiment in GeoGebra, measurement and comparison of angular values, quantitative analysis of absolute angular error, elements



of correlation analysis, pedagogical interpretation, and structural-logical modelling of research-oriented learning activity. The authors' construction was treated as a research hypothesis rather than as a proven universal method for an exact solution of the classical problem. Results. Digital verification was conducted for 18 selected initial angles ranging from 25.6° to 90° . The mean absolute error was 0.0815° , while the maximum recorded deviation of an individual part from the theoretically exact value $\alpha/3$ was approximately 0.267° . No pronounced linear relationship was found between the initial angle and the mean absolute error ($r \approx -0.12$). A characteristic symmetry of the results was identified: the two outer angles coincided within the precision of digital measurement, whereas the deviation was mainly manifested in the central angle. The pedagogical interpretation of the study resulted in a four-component model comprising problem-search, constructive, experimental-analytical, and reflective-proof components. Conclusions. The proposed construction should be interpreted as an approximation. Its didactic value lies in enabling a complete cycle of mathematical investigation, from problem formulation and hypothesis generation to digital verification, error assessment, critical interpretation, and a reasoned conclusion. The approach can be applied in mathematics lessons and extracurricular activities, particularly when working with mathematically gifted students, and supports the distinction between visually convincing experimental evidence and rigorous mathematical proof.

Key words: *dynamic mathematical modelling, GeoGebra, digital experiment, absolute angular error, mathematical reasoning, problem-solving activity.*

Вступ. Сучасне навчання математики дедалі виразніше орієнтується не лише на засвоєння готових способів розв'язування задач, а й на формування здатності здобувачів освіти самостійно ставити запитання, висувати припущення, перевіряти їх, критично оцінювати отримані результати та аргументувати висновки. Особливого значення такий підхід набуває під час навчання геометрії, де поєднуються логічне доведення, конструктивна діяльність, просторове мислення та можливості цифрового моделювання.

Одним із ресурсів для організації такої діяльності є класичні математичні задачі, зміст яких поєднує історичну інтригу, доступність постановки та складність математичного обґрунтування. До них належить задача трисекції кута – поділу заданого кута на три рівні частини. Її формулювання є зрозумілим уже на шкільному рівні, однак точна трисекція довільного кута лише циркулем і немаркованою лінійкою у загальному випадку неможлива. Алгебраїчне обґрунтування цього факту було здійснене P. L. Wantzel у 1837 році.

Саме поєднання зовнішньої простоти задачі з принциповими обмеженнями її класичного розв'язання створює продуктивну проблемну ситуацію. Зацікавленість пошуком конструкції може бути спрямована не на формальне «спростування» відомого математичного результату, а на дослідження спеціальних випадків, висунення гіпотез, побудову наближених моделей, оцінювання їх точності та з'ясування меж достовірності отриманих результатів.

Важливу роль у такій організації навчання відіграють цифрові інструменти динамічної геометрії. Вони дають можливість оперативно змінювати параметри побудови, виконувати вимірювання, накопичувати експериментальні дані та виявляти закономірності. Водночас цифрове вимірювання не може підміняти математичне доведення, що робить особливо значущим формування в здобувачів умінь розрізняти

візуальну переконливість, експериментальне підтвердження та строгий математичний висновок.

У цьому контексті задача трисекції кута може розглядатися як навчально-дослідницький кейс, у якому математична проблема стає основою для послідовного переходу від аналізу відомих фактів до висунення власної гіпотези, її геометричної реалізації, цифрової перевірки, кількісного аналізу похибки та дидактичної рефлексії.

Теоретичне обґрунтування проблеми. Аналіз сучасних праць дає підстави виокремити три взаємопов'язані напрями: розвиток математичного мислення засобами геометрії; використання проблемних і дослідницьких задач та цифрових технологій; математичні й дидактичні аспекти класичної проблеми трисекції кута.

У першому напрямі геометричну задачу розглядають як засіб розвитку математичної творчості, просторового мислення, аргументації та здатності до самостійного пошуку. Діяльнісний підхід до навчання математики акцентує активну пізнавальну позицію учня (Орос, Петечук, 2022), а дослідження геометричних задач пов'язують результативність навчання з активними формами діяльності та мотивацією (Pambudi, 2022). Особливе значення мають допоміжні побудови, пошук кількох способів розв'язання й відкриті задачі, що створюють умови для математичної творчості (Gridos et al., 2022; Muzaini et al., 2023; Simamora, Kamara, 2024). Водночас повноцінне геометричне дослідження передбачає не лише пошук, а й обґрунтування результату та розвиток просторового мислення (Winer, Battista, 2022; Safrina et al., 2022).

Другий напрям пов'язаний із цифровими середовищами та inquiry-based learning. Динамічна геометрія дає змогу варіювати параметри побудови, формулювати припущення, експериментально їх перевіряти та переходити до узагальнення й доведення (Guerrero-Ortiz,



Camacho-Machín, 2022; Ramírez-Uclés, Ruiz-Hidalgo, 2022). Використання ІКТ у геометрії пов'язують із розвитком мислення вищого порядку та концептуального розуміння (Meryansumayeka et al., 2022; Guan et al., 2024; Vízek et al., 2024; Ntshangase et al., 2024). Водночас цифровий експеримент не є математичним доказом: його результати потребують критичної перевірки й дедуктивного обґрунтування (Quaresma et al., 2024). Особливо важливою для нашого дослідження є праця М. Barabash (2026), де на прикладі трисекції кута показано, як округлення й візуальна нерозрізнюваність малих відхилень можуть створювати ілюзію математичної точності.

Третій напрям охоплює безпосередньо проблему трисекції. Класичним теоретичним підґрунтям є результат Р. Л. Wantzel (1837) про неможливість трисекції довільного кута лише циркулем і немаркованою лінійкою. Тому сучасні конструкції необхідно розмежовувати як точні для спеціальних випадків, наближені або такі, що використовують інші інструменти й умови. У літературі представлені наближені процедури (Ghoshal, 2021), дослідницькі підходи з використанням орігамі (Gracioli et al., 2021), а також різні геометричні конструкції та аналіз допустимих інструментів (Magnaghi-Delfino et al., 2021; Barton, 2022; Shirali, 2022; Silvester, 2022; Warhadpande, 2022). Це підтверджує доцільність розглядати трисекцію не як задачу з наперед заданим алгоритмом, а як проблемне поле для висунення, перевірки й критичного оцінювання математичних гіпотез.

Отже, недостатньо розкритим залишається дидактичний потенціал задачі трисекції кута як цілісного навчально-дослідницького кейсу, що поєднує геометричну побудову, цифровий експеримент, кількісне оцінювання похибки та математичну аргументацію. Саме на цьому поєднанні зосереджено наше дослідження.

Методологія та методи. Мета статті – обґрунтувати дидактичний потенціал задачі трисекції кута як навчально-дослідницького кейсу та показати можливості поєднання геометричної побудови, цифрового експерименту, кількісного аналізу похибки й математичної аргументації в навчанні геометрії.

Для досягнення мети визначено такі завдання дослідження:

- 1) розкрити дидактичний потенціал задачі трисекції кута як проблемної та дослідницької геометричної задачі;
- 2) представити запропоновану геометричну побудову як етап висунення й конструктивної реалізації дослідницької гіпотези;
- 3) здійснити цифрову та кількісну перевірку результатів побудови для різних значень вихідного кута, визначити величину й характер похибки та виявити особливості її зміни в досліджуваному діапазоні;

4) здійснити дидактичну інтерпретацію послідовності дослідження та структурувати її як модель навчально-дослідницької діяльності.

Методи дослідження: теоретичний аналіз і узагальнення наукової та науково-методичної літератури; аналіз і моделювання геометричних побудов; цифровий експеримент у середовищі GeoGebra; вимірювання та порівняння отриманих кутових величин; кількісний аналіз абсолютної кутової похибки; елементи розвідувального кореляційного аналізу для попереднього оцінювання характеру зв'язку між величиною вихідного кута та похибкою; педагогічна інтерпретація й структурно-логічне моделювання навчально-дослідницької діяльності.

Наукова новизна дослідження полягає в педагогічній інтерпретації авторської геометричної побудови як навчально-дослідницького кейсу, що поєднує висунення гіпотези, конструктивний пошук, цифрову перевірку, кількісний аналіз похибки та математичну аргументацію, а також у структуруванні цієї діяльності у вигляді чотирикомпонентної моделі. Практичне значення результатів визначається можливістю використання запропонованого кейсу в урочній, факультативній і гуртковій роботі з геометрії, зокрема під час роботи з математично обдарованими учнями.

Результати та дискусії. Трисекція кута як навчальна дослідницька проблема. Задача трисекції кута полягає в поділі заданого кута на три рівні частини. Точна трисекція довільного кута лише циркулем і немаркованою лінійкою у загальному випадку неможлива (Wantzel, 1837), однак для окремих конструктивних кутів вона здійсненна. Поєднання простої постановки з принциповим обмеженням робить цю задачу продуктивною для дослідницького навчання.

Педагогічне підґрунтя такого підходу пов'язане з практичним досвідом авторки – Алли Смоліної, яка поряд з навчанням в аспірантурі працює вчителем математики Іршавського ліцею № 2 Іршавської міської ради Закарпатської області. У роботі з математично обдарованими учнями вона систематично використовує проблемні й нестандартні задачі, що спонукають до висунення припущень, пошуку різних способів розв'язання та аргументації власної позиції. Тому задача трисекції розглядається в статті не лише як теоретичний геометричний сюжет, а і як матеріал, що виріс із реальної педагогічної практики.

Інтерес авторки до пошуку власної геометричної конструкції набув публічного розголосу у 2025 році: у матеріалі ТСН її представлено саме як учительку математики Іршавського ліцею, яка запропонувала власний підхід до класичної задачі трисекції кута (ТСН, 2025). У цій статті медійне твердження про «розв'язання» задачі не приймається як математично



доведений факт: конструкцію свідомо розглянуто як дослідницьку гіпотезу, точність якої підлягає цифровій та кількісній перевірці.

Геометрична побудова як етап висунення та перевірки гіпотези. Аналіз окремих випадків точної трисекції конструктивних кутів став підґрунтям для подальшого пошуку геометричної побудови, для подальшої перевірки на різних значеннях вихідного кута. У вихідному дослідженні такий пошук здійснювався шляхом установлення взаємозв'язків між бісектрисою заданого кута, побудовою прямого кута та поділом відповідної дуги.

Нехай задано вихідний кут $\angle M$. Запропонована геометрична побудова, представлена на рис. 1, передбачає таку послідовність дій:

1. Побудувати бісектрису заданого кута $\angle M$.
2. На бісектрисі кута побудувати допоміжну конструкцію прямого кута.
3. Дугу, що відповідає побудованому прямому куту, поділити на три рівні частини.
4. Точки поділу дуги сполучити з вершиною вихідного кута $\angle M$, одержавши два промені, які поділяють його на три частини.

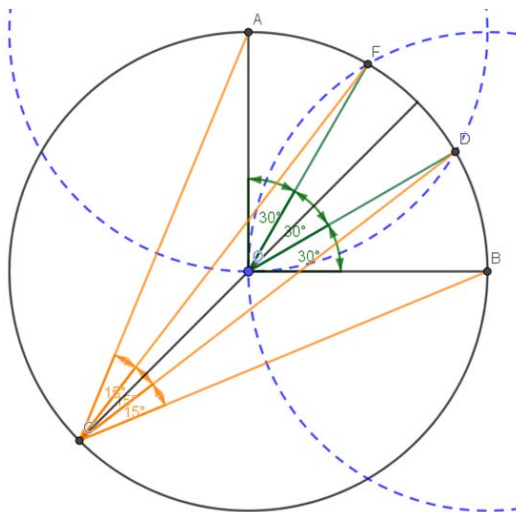


Рис. 1. Геометрична побудова для дослідження поділу кута на три частини в діапазоні $25,6^\circ$ – 90°

Перенесення властивості точного поділу допоміжного прямого кута на вихідний кут не є саме по собі достатньою підставою для твердження, що три утворені частини мають однакову градусну міру. Геометрична конструкція може візуально створювати враження трисекції, однак її точність має бути встановлена незалежною перевіркою.

Тому робочу гіпотезу сформульовано так: запропонована послідовність побудов для досліджуваних значень вихідного кута дає змогу отримати три частини, величини яких є близькими до третини величини вихідного кута; ступінь їх відповідності точній трисекції потребує кількісного визначення.

У такій організації роботи геометрична побудова виконує функцію матеріалізованої математичної гіпотези. Її візуальна переконливість створює підставу для припущення, але не замінює доказової перевірки. Наступним етапом стала експериментальна перевірка запропонованої побудови в середовищі динамічної геометрії.

3.3. Цифровий експеримент та аналіз точності геометричної побудови

Сформульована гіпотеза потребувала кількісної перевірки, оскільки візуальна відповідність геометричної конструкції очікуваному результату не є достатньою підставою для висновку про точність трисекції. З цією метою запропоновану побудову було відтворено в середовищі динамічної геометрії GeoGebra (рис. 2). Цифровий експеримент проведено для 18 довільно обраних значень вихідного кута в діапазоні від $25,6^\circ$ до 90° . Наведені значення становлять частину ширшої серії цифрових побудов, виконаних авторкою для різних величин вихідного кута. Вибір саме цих 18 значень не формувал статистичної вибірки й не був спрямований на забезпечення її репрезентативності; його метою була експериментальна перевірка поведінки запропонованої геометричної конструкції для різних значень кута в межах досліджуваного діапазону. Тому отримані кількісні результати та встановлені особливості стосуються досліджених значень кутів і не екстраполюються на всі можливі значення вихідного кута.

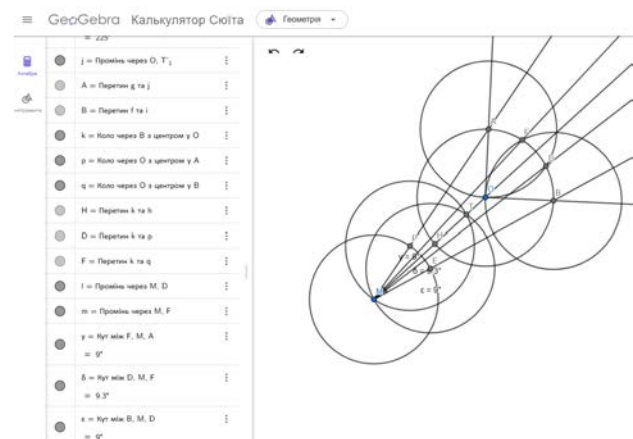


Рис. 2. Цифрова перевірка геометричної побудови для досліджуваних значень вихідного кута

Джерело: створено авторкою за допомогою GeoGebra

Для кількісного оцінювання точності як еталонне значення використано теоретично точну третину вихідного кута:

$$\alpha_t = \alpha / 3.$$



Абсолютну кутову похибку для кожного з отриманих кутів визначали як:

$$\Delta\gamma = |\gamma - \alpha/3|, \Delta\delta = |\delta - \alpha/3|, \Delta\epsilon = |\epsilon - \alpha/3|.$$

Для узагальненої характеристики точності кожного окремого експерименту розраховували середню абсолютну похибку:

$$\Delta = (\Delta\gamma + \Delta\delta + \Delta\epsilon) / 3.$$

За сукупністю 18 цифрових експериментів середня абсолютна похибка становила $0,0815^\circ$. Максимальне абсолютне відхилення окремої отриманої частини від теоретичного значення $\alpha/3$ становило приблизно $0,267^\circ$ і було зафіксовано для вихідних кутів $25,6^\circ$ та $70,1^\circ$. Отримані значення свідчать про те, що запропонована конструкція забезпечує близький до трисекції результат, однак не дають підстав трактувати її як універсальний точний спосіб поділу довільного кута на три рівні частини.

Аналіз експериментальних даних не виявив простої монотонної залежності величини похибки від величини вихідного кута. З огляду на довільний характер відбору 18 досліджуваних значень кореляційний аналіз мав розвідувальний характер і використовувався лише для попереднього оцінювання наявності та напрямку лінійного зв'язку між величиною вихідного кута і середньою абсолютною похибкою в межах сформованого набору даних. Розрахований коефіцієнт лінійної кореляції становить близько $r = -0,12$. Отримане значення не дає підстав говорити про виражений лінійний зв'язок у дослідженому наборі даних і не екстраполюється за його межі.

Водночас простежується характерна симетрія отриманих значень: у межах точності вимірювання крайні кути γ та ϵ в усіх наведених випадках мають однакові значення, тоді як центральний кут δ у більшості випадків відрізняється від них. Це дозволяє припустити, що зафіксовані відхилення мають не випадковий характер, а пов'язані з геометричною структурою самої конструкції. Встановлення математичної природи цієї закономірності потребує окремого аналітичного дослідження.

Окремої інтерпретації потребують результати для кутів $47,7^\circ$, 87° та 90° , для яких зафіксовано три однакові значення отриманих частин. Оскільки цифрові вимірювання наведені з точністю до $0,1^\circ$, значення $\Delta = 0$ не може саме по собі розглядатися як підтвердження точної трисекції: можливе відхилення, менше за розрядність вимірювання, могло бути приховане округленням.

Таким чином, цифровий експеримент виконує функцію інструмента перевірки математичної гіпотези. Його результати дозволили виявити ненульові відхилення, кількісно оцінити ступінь наближення побудованих кутів до теоретичного значення $\alpha/3$ та встановити особливості поведінки похибки в дослідженому діапазоні.

Дидактична інтерпретація задачі трисекції кута як навчально-дослідницького кейсу. Отримані результати дають підстави розглядати задачу трисекції кута як основу навчально-дослідницької діяльності, у якій побудова доповнюється перевіркою гіпотези, кількісним оцінюванням і критичною інтерпретацією.

Таблиця 1

Результати цифрової перевірки точності геометричної побудови

$\alpha, ^\circ$	$\alpha/3, ^\circ$	$\gamma, ^\circ$	$\delta, ^\circ$	$\epsilon, ^\circ$	$\Delta, ^\circ$
25,6	8,533	8,4	8,8	8,4	0,178
34,1	11,367	11,3	11,5	11,3	0,089
38,2	12,733	12,7	12,8	12,7	0,044
41,2	13,733	13,7	13,8	13,7	0,044
43,0	14,333	14,3	14,4	14,3	0,044
47,7	15,900	15,9	15,9	15,9	0,000
50,5	16,833	16,9	16,7	16,9	0,089
51,2	17,067	17,1	17,0	17,1	0,044
54,2	18,067	18,1	18,0	18,1	0,044
56,7	18,900	19,0	18,7	19,0	0,133
61,2	20,400	20,5	20,2	20,5	0,133
63,6	21,200	21,3	21,0	21,3	0,133
70,1	23,367	23,5	23,1	23,5	0,178
77,7	25,900	26,0	25,7	26,0	0,133
80,7	26,900	27,0	26,7	27,0	0,133
84,2	28,067	28,1	28,0	28,1	0,044
87,0	29,000	29,0	29,0	29,0	0,000
90,0	30,000	30,0	30,0	30,0	0,000
Середнє	–	–	–	–	0,0815

* Нульове відхилення означає збіг значень у межах точності цифрового вимірювання до $0,1^\circ$ і не є математичним доказом точної трисекції.



Запропоновані компоненти не є ізольованими етапами, а утворюють послідовний цикл навчально-дослідницької діяльності. Проблемно-пошуковий компонент забезпечує перехід від сприйняття умови задачі до постановки дослідницького запитання та висунення гіпотези; конструктивний – її геометричну реалізацію; експериментально-аналітичний – цифрову й кількісну перевірку; рефлексивно-доказовий – критичну інтерпретацію одержаних результатів та формулювання аргументованого висновку. Водночас модель має циклічний характер: виявлення похибки або спростування початкового припущення може спричинити повернення до попередніх компонентів, уточнення гіпотези чи модифікацію геометричної побудови.

Принциповою для реалізації моделі є зміна функції вчителя: від транслятора готового способу розв'язання – до організатора й фасилітатора математичного дослідження. Учителю створює проблемну ситуацію, підтримує самостійний пошук, спрямовує увагу на критерії перевірки гіпотези та допомагає розмежовувати експериментально отриманий результат і математичне доведення. Така організація особливо відповідає практиці роботи з математично обдарованими учнями, для яких продуктивним є не повідомлення наперед відомого результату, а створення умов для самостійного висунення, перевірки та критичного переосмислення припущень.

Отже, дидактична модель не зводиться до послідовності технічних дій із виконання геометричної побудови. Її визначальною ознакою є поєднання класичного геометричного конструювання, цифрового експерименту, кількісного аналізу похибки та рефлексивно-доказової діяльності в єдиному дослідницькому циклі. При цьому педагогічно значущим результатом є не лише підтвердження або спростування вихідної гіпотези, а й сам процес встановлення меж достовірності отриманого результату. Саме тому виявлена неточність конструкції набуває навчальної цінності: вона перетворює помилку з небажаного результату на джерело нового математичного запитання й подальшого дослідження.

Обговорення результатів. Проведене дослідження дозволяє розмежувати математичний, експериментальний і дидактичний аспекти отриманих результатів. З математичного погляду запропонована геометрична конструкція не розглядається як точний універсальний спосіб трисекції довільного кута циркулем і немаркованою лінійкою, що узгоджується з класичним результатом P. L. Wantzel (1837). Водночас виконана побудова становить самостійний об'єкт математичного дослідження, оскільки для досліджених значень вихідного кута дає три частини, близькі до теоретичного значення $\alpha/3$, та виявляє характерну

Таблиця 2

Чотирикомпонентна модель навчально-дослідницької діяльності

Компонент	Мета	Дії учня	Дії вчителя	Цифрові засоби	Очікуваний результат
Проблемно-пошуковий	Створення проблемної ситуації та формулювання дослідницького запитання	Аналізує умову, формулює запитання, висуває гіпотезу	Актуалізує знання, створює проблемну ситуацію, спрямовує пошук запитаннями	GeoGebra за потреби для попередньої візуалізації	Дослідницьке запитання та робоча гіпотеза
Конструктивний	Геометрична реалізація висунутої гіпотези	Виконує побудову, визначає послідовність, прогнозує результат, обґрунтовує допоміжні елементи	Організовує самостійну конструктивну діяльність, спонукає аргументувати етапи	Креслярські засоби; GeoGebra	Геометрична модель передбачуваного розв'язання
Експериментально-аналітичний	Цифрова перевірка гіпотези та кількісне оцінювання точності	Відтворює конструкцію, змінює α , вимірює кути, порівнює з $\alpha/3$, обчислює похибку	Допомагає визначити критерій точності, спрямовує систематизацію та аналіз даних	GeoGebra; засоби обчислення	Кількісна оцінка точності, виявлення похибки та особливостей її зміни
Рефлексивно-доказовий	Критична математична інтерпретація та аргументований висновок	Зіставляє експериментальні й теоретичні результати, оцінює межі, уточнює або відхиляє гіпотезу	Організовує рефлексію, розмежовує цифровий експеримент і математичне доведення	GeoGebra як джерело експериментальних даних	Аргументований висновок про наближений характер побудови та межі цифрової перевірки



симетрію крайніх кутів γ і ϵ . Встановлення математичної природи цієї симетрії та аналітичного закону зміни похибки виходить за межі цього дослідження і потребує окремого теоретичного аналізу.

Отримані результати доцільно розглядати в контексті сучасних праць, присвячених різним способам дослідження трисекції кута. Зокрема, M. Ghoshal (2021) безпосередньо характеризує запропоновану ним процедуру як наближену, тоді як у працях P. Magnaghi-Delfino, G. Mele і T. Norando (2021), L. O. Barton (2022), S. Shirali (2022), M. Warhadpande (2022) та J. R. Silvester (2022) розглядаються різні геометричні процедури, допустимі інструменти й умови побудови. Спільною методологічною вимогою є чітке розмежування точної конструкції, наближеної процедури та способів, що передбачають зміну класичних умов задачі. У цьому контексті результати цифрового експерименту дають підстави трактувати досліджувану конструкцію як наближену: для 18 представлених значень кута в діапазоні $25,6^\circ$ – 90° середня абсолютна похибка становила $0,0815^\circ$, а максимальне зафіксоване відхилення окремої частини – близько $0,267^\circ$.

Результати цифрової перевірки водночас підтверджують методичну значущість динамічних геометричних середовищ як інструмента дослідження, а не лише візуалізації. Це узгоджується з працями H. Guan et al. (2024) щодо використання систем динамічної геометрії в inquiry-based learning та L. Vizek et al. (2024) щодо ролі динамічних конструкцій у формуванні концептуального розуміння. Особливо важливою для інтерпретації отриманих результатів є позиція M. Varabash (2026): цифрове середовище може створювати ілюзію математичної точності через округлення та візуальну нерозрізнюваність малих відхилень. У проведеному експерименті це виявилось у випадках, коли за точності вимірювання до $0,1^\circ$ отримані частини чисельно збігалися, хоча такий збіг не може розглядатися як доказ точної трисекції. Таким чином, GeoGebra виконує подвійну функцію: забезпечує експериментальну перевірку гіпотези й одночасно створює підстави для критичного осмислення меж цифрового експерименту. Перехід від експериментальної перевірки до необхідності дедуктивного обґрунтування акцентується також у дослідженні P. Quaresma, V. Santos і J. Teles (2024).

Відмінність запропонованого підходу полягає не у введенні нового способу точної трисекції, а в дидактичній трансформації авторської геометричної конструкції у цілісний навчально-дослідницький кейс. На відміну від робіт, у яких основна увага зосереджена на математичній процедурі поділу кута, у цьому дослідженні конструкція є вихідною гіпотезою для організації послідовності «проблема → гіпотеза →

побудова → цифровий експеримент → кількісний аналіз похибки → математична інтерпретація → аргументований висновок». Саме інтеграція геометричного конструювання, цифрового експерименту, кількісного оцінювання похибки та рефлексивно-доказової діяльності становить педагогічний внесок дослідження і є підґрунтям запропонованої чотирикомпонентної моделі.

Інтерпретуючи наведені результати, слід враховувати межі проведеного дослідження: кількісні характеристики отримано для конкретного набору 18 значень кута, а кореляційний аналіз має розвідувальний характер. Тому порівняльний аналіз підтверджує насамперед доцільність використання цієї конструкції як навчально-дослідницького кейсу, а не як підстави для узагальнення математичних властивостей на всі можливі значення вихідного кута.

Висновки

1. Розкрито дидактичний потенціал задачі трисекції кута як проблемної та дослідницької геометричної задачі. Її навчальна цінність визначається можливістю організувати діяльність учнів як послідовність постановки проблеми, висунення гіпотези, конструктивного пошуку, перевірки, аналізу та аргументованого висновку, а також формувати критичне ставлення до візуально переконливого результату.

2. Запропоновану геометричну побудову представлено як конструктивну реалізацію дослідницької гіпотези, а не як доведений універсальний спосіб точної трисекції. Така інтерпретація дозволяє використовувати саму побудову як предмет математичного дослідження та як підставу для переходу від припущення до незалежної кількісної перевірки.

3. Цифрову та кількісну перевірку здійснено для 18 довільно обраних значень вихідного кута в діапазоні $25,6^\circ$ – 90° . Середня абсолютна похибка за сукупністю експериментів становила $0,0815^\circ$, максимальне зафіксоване відхилення окремої частини від $\alpha/3$ – близько $0,267^\circ$. Для дослідженого набору характерною є симетрія крайніх кутів γ і ϵ . Розвідувальний кореляційний аналіз ($r \approx -0,12$) не виявив вираженого лінійного зв'язку між величиною вихідного кута та середньою абсолютною похибкою. Отримані результати підтверджують наближений характер досліджуваної конструкції в межах представлених даних.

4. Дидактичну інтерпретацію послідовності дослідження структуровано у вигляді чотирикомпонентної моделі навчально-дослідницької діяльності, що охоплює проблемно-пошуковий, конструктивний, експериментально-аналітичний та рефлексивно-доказовий компоненти. Для кожного компонента конкретизовано мету, дії учня і вчителя, цифрові засоби та очікуваний результат. Практична цінність моделі полягає в можливості її використання на уроках



геометрії та в позакласній роботі, зокрема під час роботи з математично обдарованими учнями, для організації дослідницької діяльності, цифрового експерименту, аналізу похибки та математичної аргументації.

Перспективи подальшої роботи пов'язані з двома взаємодоповнювальними напрямками: математичним – аналітичним встановленням закономірностей зміни похибки та поясненням виявленої симетрії геометричної конструкції; педагогічним – апробацією чотирикомпонентної моделі в освітньому процесі та дослідженням її можливостей для розвитку дослідницьких умінь учнів. Така апробація дасть змогу перейти від теоретико-дидактичного обґрунтування моделі до оцінювання її результативності в реальній навчальній практиці.

Використання штучного інтелекту. Під час редакційного опрацювання, мовно-стилістичного вдосконалення та структурування окремих фрагментів рукопису використано ChatGPT (OpenAI, GPT-5.6 Sol). Авторка критично перевірила та відредагувала отриманий за допомогою інструменту контент і несе повну відповідальність за зміст статті.

Доступність даних. Дані, використані для кількісного аналізу в цьому дослідженні, можуть бути надані за обґрунтованим запитом авторці.

Фінансування. Дослідження виконане за відсутності фінансової підтримки з боку будь-яких організацій.

Конфлікт інтересів. Авторка підтверджує відсутність фінансових, особистих чи інших інтересів, що можуть розглядатися як потенційний конфлікт інтересів щодо публікації цієї статті.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Barabash M. "Precision", "Approximation", and Experimental Mathematics at School in the Age of Digital Educational Technology. *Education Sciences*. 2026. Vol. 16, No. 8. 1199. DOI: 10.3390/educsci16081199.
2. Barton L. O. A Procedure for Trisecting an Acute Angle. *Advances in Pure Mathematics*. 2022. Vol. 12, No. 2. P. 63–69. DOI: 10.4236/apm.2022.122005.
3. Ghoshal M. Angle Trisection – An Approximate Procedure. *At Right Angles*. 2021. No. 11. P. 71–72. ISSN 2582-1873.
4. Gracioli C. Y. L. F., Batista C. C., Shintani R. M. Trissecção do ângulo obtuso com origami: um olhar para a história e a investigação matemática. *Boletim Cearense de Educação e História da Matemática*. 2021. Vol. 8, No. 23. DOI: 10.30938/bocehm.v8i23.5132.
5. Gridos P., Avgerinos E., Mamona-Downs J., Vlachou R. Geometrical Figure Apprehension, Construction of Auxiliary Lines, and Multiple Solutions in Problem Solving: Aspects of Mathematical Creativity in School Geometry. *International Journal of Science and Mathematics Education*. 2022. Vol. 20, No. 3. P. 619–636. DOI: 10.1007/s10763-021-10155-4.
6. Guan H., Li J., Rao Y., Chen R., Xu Z. Comparative effects of dynamic geometry system and physical manipulatives on Inquiry-based Math Learning for students in Junior High School. *Education and Information Technologies*. 2024. Vol. 29. P. 21477–21499. DOI: 10.1007/s10639-024-12663-6.
7. Guerrero-Ortiz C., Camacho-Machín M. Characterizing Tasks for Teaching Mathematics in Dynamic Geometry System and Modelling Environments. *Mathematics*. 2022. Vol. 10, No. 8. 1239. DOI: 10.3390/math10081239.
8. Magnaghi-Delfino P., Mele G., Norando T. Geometrical Solution for the Trisection Problem. *Faces of Geometry*. Cham: Springer, 2021. P. 193–208. DOI: 10.1007/978-3-030-63702-6_15.
9. Meryansumayeka, Zulkardi, Putri R. I. I., Hiltrimartin C. Designing geometrical learning activities assisted with ICT media for supporting students' higher order thinking skills. *Journal on Mathematics Education*. 2022. Vol. 13, No. 1. P. 135–148. DOI: 10.22342/jme.v13i1.pp135-148.
10. Muzaini M., Rahayuningsih S., Ikram M., Nasiruddin F. A.-Z. Mathematical Creativity: Student Geometrical Figure Apprehension in Geometry Problem-Solving Using New Auxiliary Elements. *International Journal of Educational Methodology*. 2023. Vol. 9, No. 1. P. 139–150. DOI: 10.12973/ijem.9.1.139.
11. Ntshangase S. C., Ndlovu M., Oladele J. I. The effect of dynamic geometry software use for teaching and learning Grade 11 circle geometry. *African Journal of Teacher Education and Development*. 2024. Vol. 3, No. 1. a50. DOI: 10.4102/ajoted.v3i1.50.
12. Орос В. М., Петечук Ю. В. Застосування діяльнісного підходу на уроках математики в контексті Нової української школи. *Науковий вісник Ужгородського національного університету. Серія: Педагогіка. Соціальна робота*. 2022. № 1(50). С. 211–214. DOI: 10.24144/2524-0609.2022.50.211-214.
13. Pambudi D. S. The Effect of Outdoor Learning Method on Elementary Students' Motivation and Achievement in Geometry. *International Journal of Instruction*. 2022. Vol. 15, No. 1. P. 747–764. DOI: 10.29333/iji.2022.15143a.
14. Quaresma P., Santos V., Teles J. Proof exploration using dynamic geometry systems with integrated automated deduction capabilities. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. 2026. Vol. 57, No. 2. P. 317–341. DOI: 10.1080/0020739X.2024.2377724.
15. Ramírez-Uclés R., Ruiz-Hidalgo J. F. Reasoning, Representing, and Generalizing in Geometric Proof Problems among 8th Grade Talented Students. *Mathematics*. 2022. Vol. 10, No. 5. 789. DOI: 10.3390/math10050789.
16. Safrina Y., Ikhsan M., Zubainur C. M. Improving Student Geometry Problem-Solving Skills Through Spatial Training. *Proceedings of the Eighth Southeast Asia Design Research (SEA-DR) & the Second Science, Technology, Education, Arts, Culture, and Humanity (STEACH) International Conference (SEADR-STEACH 2021)*. *Advances in Social Science, Education and Humanities Research*. 2022. Vol. 627. P. 30–37. Atlantis Press. DOI: 10.2991/assehr.k.211229.005.
17. Shirali S. Analysis of the Angle Trisection Procedure. *At Right Angles*. 2022. No. 12. P. 110–114. ISSN 2582-1873.
18. Silvester J. R. The trisectrix and Langley's problem. *The Mathematical Gazette*. 2022. Vol. 106, No. 565. P. 21–27. DOI: 10.1017/mag.2022.5.



19. Simamora R. E., Kamara J. G. Unlocking Mathematical Creativity: How Students Solve Open-Ended Geometry Problems. *Jurnal Pendidikan MIPA*. 2024. Vol. 25, No. 1. P. 66–86. DOI: 10.23960/jpmipa/v25i1.pp66-86.
 20. Українка розв'язала одну з найдавніших математичних задач – трисекцію кута. ТЧН. 23.06.2025. URL: <https://tsn.ua/ukrayina/ukrayinka-rozviazala-odnu-z-naydavnishykh-matematychnykh-zadach-tryseksiukuta-2853887.html> (дата звернення: 13.09.2026).
 21. Vízek L., Samková L., Star J. R. Assessing the quality of conceptual knowledge through dynamic constructions. *Educational Studies in Mathematics*. 2024. Vol. 117. P. 167–191. DOI: 10.1007/s10649-024-10349-x.
 22. Wantzel P. L. Recherches sur les moyens de reconnaître si un Problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*. 1837. 1re série, Vol. 2. P. 366–372.
 23. Warhadpande M. The Minimal Instruments of Geometry – II. At Right Angles. 2022. No. 13. P. 12–16. ISSN 2582-1873.
 24. Winer M. L., Battista M. T. Investigating Students' Proof Reasoning: Analyzing Students' Oral Proof Explanations and Their Written Proofs. *International Electronic Journal of Mathematics Education*. 2022. Vol. 17, No. 2. em0677. DOI: 10.29333/iejme/11713.
- REFERENCES:**
1. Barabash, M. (2026). “Precision”, “approximation”, and experimental mathematics at school in the age of digital educational technology. *Education Sciences*, 16(8), 1199. <https://doi.org/10.3390/educsci16081199>
 2. Barton, L. O. (2022). A procedure for trisecting an acute angle. *Advances in Pure Mathematics*, 12(2), 63–69. <https://doi.org/10.4236/apm.2022.122005>
 3. Ghoshal, M. (2021). Angle trisection–An approximate procedure. *At Right Angles*, 11, 71–72.
 4. Graciolli, C. Y. L. F., Batista, C. C., & Shintani, R. M. (2021). Trisecção do ângulo obtuso com origami: Um olhar para a história e a investigação matemática [Trisection of an obtuse angle with origami: A look at history and mathematical investigation]. *Boletim Cearense de Educação e História da Matemática*, 8(23). <https://doi.org/10.30938/bocehm.v8i23.5132> [in Portuguese].
 5. Gridos, P., Avgerinos, E., Mamona-Downs, J., & Vlachou, R. (2022). Geometrical figure apprehension, construction of auxiliary lines, and multiple solutions in problem solving: Aspects of mathematical creativity in school geometry. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 20(3), 619–636. <https://doi.org/10.1007/s10763-021-10155-4>
 6. Guan, H., Li, J., Rao, Y., Chen, R., & Xu, Z. (2024). Comparative effects of dynamic geometry system and physical manipulatives on inquiry-based math learning for students in junior high school. *Education and Information Technologies*, 29, 21477–21499. <https://doi.org/10.1007/s10639-024-12663-6>
 7. Guerrero-Ortiz, C., & Camacho-Machín, M. (2022). Characterizing tasks for teaching mathematics in dynamic geometry system and modelling environments. *Mathematics*, 10(8), 1239. <https://doi.org/10.3390/math10081239>
 8. Magnaghi-Delfino, P., Mele, G., & Norando, T. (2021). Geometrical solution for the trisection problem. In *Faces of Geometry* (pp. 193–208). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-63702-6_15
 9. Meryansumayeka, Zulkardi, Putri, R. I. I., & Hiltrimartin, C. (2022). Designing geometrical learning activities assisted with ICT media for supporting students' higher order thinking skills. *Journal on Mathematics Education*, 13(1), 135–148. <https://doi.org/10.22342/jme.v13i1.pp135-148>
 10. Muzaini, M., Rahayuningsih, S., Ikram, M., & Nasiruddin, F. A.-Z. (2023). Mathematical creativity: Student geometrical figure apprehension in geometry problem-solving using new auxiliary elements. *International Journal of Educational Methodology*, 9(1), 139–150. <https://doi.org/10.12973/ijem.9.1.139>
 11. Ntshangase, S. C., Ndlovu, M., & Oladele, J. I. (2024). The effect of dynamic geometry software use for teaching and learning Grade 11 circle geometry. *African Journal of Teacher Education and Development*, 3(1), a50. <https://doi.org/10.4102/ajoted.v3i1.50>
 12. Oros, V. M., & Petechuk, Yu. V. (2022). Zastosuvannia diialnisono pidkhodu na urokakh matematyky v konteksti Novoi ukrainskoi shkoly [Application of the activity-based approach in mathematics lessons in the context of the New Ukrainian School]. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series: Pedagogy. Social Work*, 1(50), 211–214. <https://doi.org/10.24144/2524-0609.2022.50.211-214> [in Ukrainian].
 13. Pambudi, D. S. (2022). The effect of outdoor learning method on elementary students' motivation and achievement in geometry. *International Journal of Instruction*, 15(1), 747–764. <https://doi.org/10.29333/iji.2022.15143a>
 14. Quaresma, P., Santos, V., & Teles, J. (2026). Proof exploration using dynamic geometry systems with integrated automated deduction capabilities. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 57(2), 317–341. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2024.2377724>
 15. Ramírez-Uclés, R., & Ruiz-Hidalgo, J. F. (2022). Reasoning, representing, and generalizing in geometric proof problems among 8th grade talented students. *Mathematics*, 10(5), 789. <https://doi.org/10.3390/math10050789>
 16. Safrina, Y., Ikhsan, M., & Zubainur, C. M. (2022). Improving student geometry problem-solving skills through spatial training. In *Proceedings of the Eighth Southeast Asia Design Research (SEA-DR) & the Second Science, Technology, Education, Arts, Culture, and Humanity (STEACH) International Conference (SEADR-STEACH 2021)* (Vol. 627, pp. 30–37). Atlantis Press. <https://doi.org/10.2991/assehr.k.211229.005>
 17. Shirali, S. (2022). Analysis of the angle trisection procedure. *At Right Angles*, 12, 110–114.
 18. Silvester, J. R. (2022). The trisectrix and Langley's problem. *The Mathematical Gazette*, 106(565), 21–27. <https://doi.org/10.1017/mag.2022.5>
 19. Simamora, R. E., & Kamara, J. G. (2024). Unlocking mathematical creativity: How students solve open-ended geometry problems. *Jurnal Pendidikan MIPA*, 25(1), 66–86. <https://doi.org/10.23960/jpmipa/v25i1.pp66-86>
 20. TSN. (2025, June 23). Ukrainka rozviazala odnu z naidavnishykh matematychnykh zadach – tryseksiukuta



[A Ukrainian woman solved one of the oldest mathematical problems—the trisection of an angle]. <https://tsn.ua/ukrayina/ukrayinka-rozviazala-odnu-z-naydavnishykh-matematychnykh-zadach-tryseksiui-kuta-2853887.html> [in Ukrainian].

21. Vízek, L., Samková, L., & Star, J. R. (2024). Assessing the quality of conceptual knowledge through dynamic constructions. *Educational Studies in Mathematics*, 117, 167–191. <https://doi.org/10.1007/s10649-024-10349-x>

22. Wantzel, P. L. (1837). Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de géométrie peut se résoudre

avec la règle et le compas [Research on methods for determining whether a geometry problem can be solved with ruler and compass]. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 2, 366–372. [in French].

23. Warhadpande, M. (2022). The minimal instruments of geometry – II. *At Right Angles*, 13, 12–16.

24. Winer, M. L., & Battista, M. T. (2022). Investigating students' proof reasoning: Analyzing students' oral proof explanations and their written proofs. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 17(2), em0677. <https://doi.org/10.29333/iejme/11713>

Стаття поширюється на умовах
ліцензії відкритого доступу CC BY 4.0



Дата першого надходження статті до видання: 03.08.2026

Дата прийняття статті до друку після рецензування: 02.09.2026

Дата публікації (оприлюднення) статті: 26.10.2026